Extremale Graphentheorie – Übungsblatt 3
Wintersemester 2019/20
Dr. Christian Reiher, Bjarne Schülke

---

11. (a) Es sei G ein Graph mit n Ecken und $\delta(G) > 10n^{1/3}$. Man beweise, dass G einen Kreis enthält, dessen Länge höchstens 6 beträgt.

    (b) Es sei G ein Graph mit n Ecken und $e(G) > 100n^{4/3}$. Man beweise, dass G einen Kreis enthält, dessen Länge höchstens 6 beträgt.

12. Man betrachte einen Graphen G mit der Eigenschaft, dass es zu jeder Ecke x höchstens 100 Ecken gibt, die genau den Abstand 3 von x haben. Man beweise, dass es keine Ecke in G gibt, von der mehr als 2550 andere Ecken genau den Abstand 4 haben.

13. Es seien $s \geqslant 2$ eine natürliche Zahl und sK_2 der Graph auf $2s$ Ecken mit s paarweise disjunkten Kanten. Man beweise, dass

$$\mathrm{ex}(n, sK_2) = \begin{cases} \binom{2s-1}{2} & \text{wenn } n \leqslant \frac{1}{2}(5s-2) \\ (s-1)n - \binom{s}{2} & \text{wenn } n \geqslant \frac{1}{2}(5s-2)\,. \end{cases}$$

14. Für einen r-uniformen Hypergraphen H und $n \in \mathbb{N}$ sei $\mathrm{ex}(n, H)$ die größtmögliche Anzahl von Kanten, die ein r-uniformer Hypergraph auf n Ecken haben kann, ohne einen zu H isomorphen Teilhypergraphen zu enthalten. Man beweise, dass die Turándichte

$$\pi(H) = \lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{ex}(n, H)}{\binom{n}{r}}$$

existiert.

15. Man beweise, dass ein 3-uniformer Hypergraph H genau dann die Eigenschaft $\pi(H) = 0$ hat, wenn H tripartit ist, d.h. wenn man die Ecken von H so mit den Farben *rot*, *grün* und *blau* färben kann, dass in allen Tripeln von H alle drei Farben vorkommen.

16. Es sei H ein 3-uniformer Hypergraph mit $\pi(H) > 0$. Man beweise, dass sogar $\pi(H) \geqslant \frac{2}{9}$ gilt.

- Abgabe von Aufgabe 11 (schriftlich, keine Gruppenarbeit) am Donnerstag den 21. November vor der Vorlesung
- Eintragung zu den Aufgabe 12–16 bis Freitag den 22. November, 12:00 Uhr unter https://is.gd/7arJ0y
- Diskussion am Freitag, den 22. November, 12:15 Uhr, Geom 432

Hinweise

11. Bei (a) kann man sich fragen, wie viele Wege der Länge drei in jeder Ecke beginnen.

12. Es sei x eine Ecke von G. Eine Teilmenge A der Nachbarschaft von x heißt *substantiell*, wenn man jede Ecke, die den Abstand 4 von x hat, von x ausgehend auf einem durch A führenden Weg der Länge 4 erreichen kann. Man betrachte eine minimale substantielle Menge!

13. Hier hilft der legendäre 1-Faktorensatz von Tutte.

14. Das ist analog zum Satz von Katona, Nemetz und Simonovits.

15. Die eine richtig folgt aus einem Satz der Vorlesung, für die andere muss man einen dichten Hypergraphen angeben.

16. Sowohl das Ergebnis von Aufgabe 15 als auch eine Konstruktion, die in einer möglichen Lösung auftritt, sind nützlich.